



CHAPITRE 5 : Régime sinusoïdal

Dans ce chapitre, nous étudions le régime RLC en régime sinusoïdal forcé par utilisation de la notation complexe. Nous introduisons les notions essentielles liées aux régimes sinusoïdaux permanents utilisés dans toute l'électronique et l'électrotechnique et étudions les caractéristiques du phénomène de résonance que l'on retrouve dans de nombreux domaines de la physique.

1. Régime sinusoïdal forcé

1.1. Définition

Un circuit électrique est en régime sinusoïdal permanent quand tensions et courants sont des fonctions sinusoïdales du temps de même fréquence. Le circuit électrique doit être linéaire (c'est-à-dire composé de dipôles linéaires) et alimenté en permanence par une source d'énergie électrique sinusoïdale. Dans ce régime tous les signaux transitoires n'existent plus, seul le régime permanent existe.

1.2. Signaux sinusoïdaux

1.2.1. Amplitude, phase, pulsation et fréquence

Une grandeur sinusoïdale s'écrit :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

X_m = amplitude complexe ; ω = pulsation en $rad.s^{-1}$; $\omega t + \varphi$ = la phase à l'instant t ; φ est égal à la phase à l'origine. La période est la durée au bout de laquelle le signal se reproduit identique à lui-même : $T = 2\pi/\omega$

La fréquence du signal est le nombre de périodes par secondes :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

1.2.2. Valeur moyenne et valeur efficace

On définit d'une manière générale pour un signal périodique la valeur moyenne notée $\langle x \rangle$ par :

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$\langle x \rangle = 0$ pour une fonction sinusoïdale



On définit d'une manière générale pour un signal périodique la valeur efficace notée X par :

$$X^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

Pour une fonction sinusoïdale :

$$X^2 = \frac{1}{T} \int_0^T X_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{X_m^2}{T} \frac{1}{2} T$$

$$X = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

1.2.3. Notation complexe

1.2.3.1. Quelques rappels

- $|\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2| = |\underline{Z}_1| \cdot |\underline{Z}_2|$ et $|\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2| = |\underline{Z}_1| / |\underline{Z}_2|$
- $Arg(\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2) = Arg(\underline{Z}_1) + Arg(\underline{Z}_2)$ et $Arg\left(\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right) = Arg(\underline{Z}_1) - Arg(\underline{Z}_2)$
- $Arg(a > 0) = 0$ et $Arg(a < 0) = \pi$
- $Arg(ja)(a > 0) = \frac{\pi}{2}$ et $Arg(ja)(a < 0) = -\frac{\pi}{2}$
- Si $\underline{Z} = a + jb = |\underline{Z}|e^{j\theta}$, alors :

$$|\underline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2} ; \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\Re(\underline{Z})}{|\underline{Z}|} ; \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\Im(\underline{Z})}{|\underline{Z}|}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{\Im(\underline{Z})}{\Re(\underline{Z})}$$

1.2.3.2. Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale

Nous avons vu qu'une grandeur sinusoïdale peut être mise sous la forme:

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

La représentation complexe de $x(t)$ est la fonction complexe :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe, son module est égale à l'amplitude de la grandeur

$x(t)$: $X_m = |\underline{X}_m|$, son argument est : $\varphi = \arg \underline{X}_m$

1.2.3.3. Intérêt de la notation complexe

➤ Linéarité

$$x_1(t) = X_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad ; \quad x_2(t) = X_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = x_1(t) + x_2(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = X_{1m} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} + X_{2m} e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}$$

$$\boxed{X_m = X_{1m} + X_{2m}}$$

L'addition de fonctions sinusoïdales de même pulsation ω est équivalente à l'addition des amplitudes complexes en notation complexe.

➤ Dérivation

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{x}(t) = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega X_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \omega X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$\boxed{\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x}(t)}$$

Dériver par rapport à t en notation réelle revient à multiplier par $j\omega$ en notation complexe.

➤ Intégration

$$\begin{aligned} x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) &\Rightarrow \int x(t) dt = \frac{1}{\omega} X_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{\omega} X_m \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\omega} X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\omega} X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int \underline{x}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{x}(t)}$$

Intégrer par rapport à t en notation réelle revient à multiplier par $1/j\omega$ en notation complexe.

1.3. Impédance complexe et admittance complexe

Soit un dipôle linéaire AB



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow \underline{i}(t) = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$$

Puisque le dipôle est linéaire alors la tension $u(t)$ est sinusoïdale de même pulsation :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow \underline{u}(t) = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

On appelle impédance complexe :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi_u} e^{-j\varphi_i} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \underline{Z} e^{j\varphi}$$

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m}$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arg \underline{Z}$$

φ : déphasage entre u et i

L'admittance complexe est l'inverse de l'impédance :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I_m}{U_m} e^{-j\varphi}$$

1.3.1. Applications

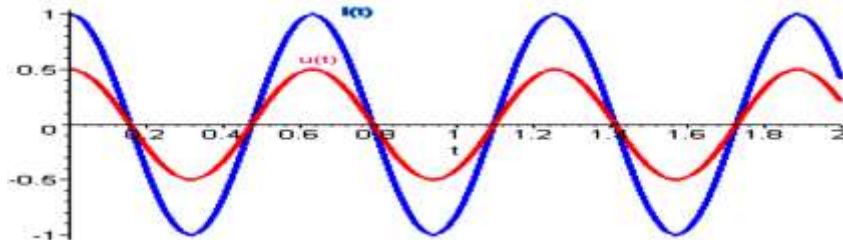
➤ Résistance pure

$$u = Ri \Rightarrow \underline{U}_m = R \underline{I}_m$$

$$\underline{Z}_R = R \Rightarrow Z_R = R$$

$u(t)$ et $i(t)$ sont en phase donc :

$$\varphi_R = 0$$



➤ Bobine idéale

$$u = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \underline{U}_m = jL\omega \underline{I}_m$$

$$\underline{Z}_L = jL\omega \Rightarrow Z_L = L\omega$$

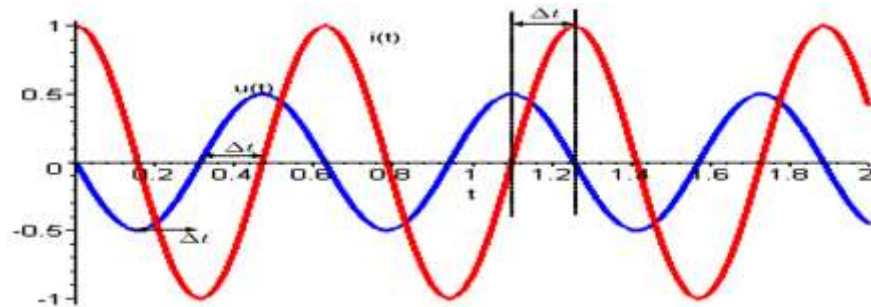
$u(t)$ et $i(t)$ sont déphasés de $\pi/2$:

$$\varphi_L = \arg \underline{Z}_L = \arg(jL\omega)$$

$$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$$

$\varphi_L > 0 \Rightarrow u(t)$ est en quadrature avance par rapport à $i(t)$

$$\varphi_L = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta T = \frac{T}{4}$$



➤ **Condensateur**

$$u = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow \underline{U}_m = \frac{1}{jC\omega} \underline{I}_m$$

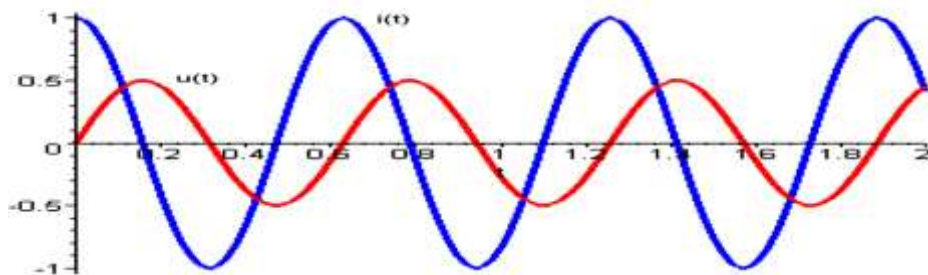
$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow Z_C = \frac{1}{C\omega}$$

$u(t)$ et $i(t)$ sont déphasés de $-\pi/2$:

$$\varphi_L = \arg \underline{Z}_C = \arg \left(\frac{1}{jC\omega} \right)$$

$$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$$

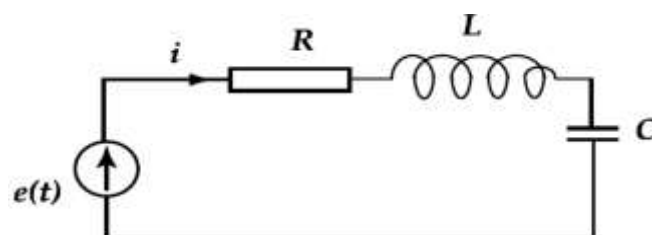
$\varphi_C < 0 \Rightarrow u(t)$ est en quadrature retard par rapport à $i(t)$



2. Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé

Soit un circuit RLC serie alimenté par un GBF maintenant entre ses bornes une tension :

$$e(t) = E \cos(\omega t + \varphi_e)$$



2.1. Etude de l'impédance

$$RLC \text{ série} \Rightarrow \underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = (R + r) + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

$$\underline{Z} = R' + jX \Rightarrow R' = R + r \quad \text{et} \quad X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

Réactance du circuit RLC

L'admittance complexe du circuit RLC série :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Le module de l'impédance est :

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{(R + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

Le déphasage est :

$$\tan \varphi = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{R + r}$$

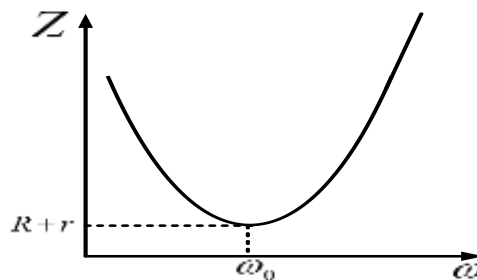
❖ Détermination de l'extremum de Z

$$Z = \sqrt{(R + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \Rightarrow \frac{dZ}{d\omega} = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \left(L + \frac{1}{C\omega^2} \right)}{\sqrt{(R + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$$

$$\frac{dZ}{d\omega} = 0 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

Z est minimale pour $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

$$Z_{min} = R + r$$



2.2. Résonance courant dans le circuit RLC serie

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = e(t)$$

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int i(t) dt \Rightarrow Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t) = E \cos(\omega t + \varphi_e)$$

En notation complexe :

$$R\underline{i} + L \frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{1}{C} \int \underline{i} dt = \underline{E} e^{j\omega t} \Rightarrow R\underline{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \underline{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m e^{j\omega t} = \underline{E} e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow R\underline{I}_m + j\omega L \underline{I}_m + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m = \underline{E} \Rightarrow \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I}_m = \underline{E}$$

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

En posant $x = \omega/\omega_0$ avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ on a :

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}}{R \left[1 + j \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{\omega RC} \right) \right]} = \frac{\underline{E}}{R \left[1 + j \left(\frac{L\omega_0 x}{R} - \frac{1}{\omega_0 RCx} \right) \right]}$$

$$\text{facteur de qualité} = Q = \frac{L\omega_0}{R} \Rightarrow \underline{I}_m = \frac{\underline{E}}{R \left[1 + j \left(Qx - \frac{Q}{x} \right) \right]}$$

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}}{R \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]}$$

2.2.1. Etude de l'amplitude I_m

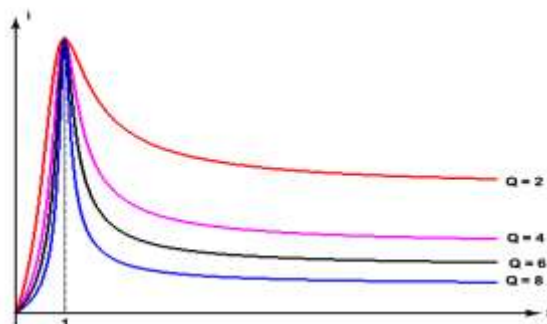
$$I_m = |\underline{I}_m| = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0 \Rightarrow I_m = \frac{E}{R} \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow I_m \rightarrow 0 \end{cases}$$

I_m est maximal pour $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ qui est la **pulsation de résonance du circuit**.

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow I_m(\omega_0) = \frac{E}{R}$$

Représentons graphiquement I_m en fonction x pour différentes valeurs du facteur de qualité Q



2.2.2. Bande passante à $-3dB$

La bande passante à $-3dB$ est l'intervalle des pulsations $[\omega_1, \omega_2]$ ou fréquence $[f_1, f_2]$ tel que :

$$I_m \geq \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$I_m \geq \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{E}{R\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \geq \frac{E}{R\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \leq 2 \Rightarrow Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 - 1 \leq 0$$

$$I_m = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow Q\left(x-\frac{1}{x}\right) = \pm 1$$

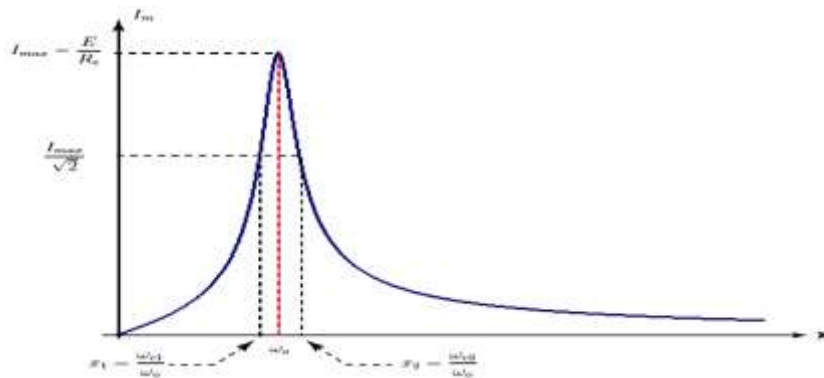
$$\Rightarrow x^2 \pm \frac{1}{Q}x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1;2} = \mp \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \\ x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = +\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \end{cases}$$

La largeur de la bande passante à $-3dB$ est :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0(x_2 - x_1) = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

La résonance est donc d'autant plus aigüe si la bande passante est étroite (R faible) que le facteur de qualité est élevée (et donc l'amortissement est faible).



2.2.3. Etude du déphasage φ

$$\underline{I_m} = \frac{\underline{E}}{R \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]} \Rightarrow \text{Arg}(\underline{I_m}) = \text{arg} \left(\frac{\underline{E}}{R} \right) - \text{arg} \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]$$

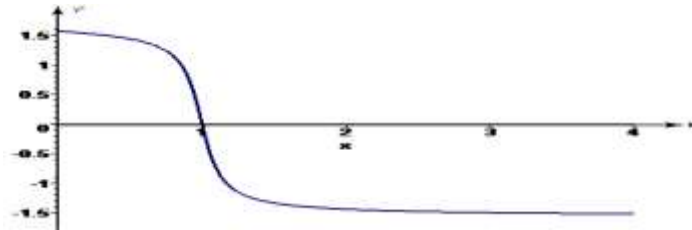
$$\Rightarrow \varphi_i = \text{arg}(\underline{E}) + \text{arg} \left(\frac{1}{R} \right) - \text{arg} \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right] = \varphi_e - 0 - \text{arg} \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]$$

En posant $\varphi = \varphi_i - \varphi_e$ on a :

$$\varphi = -\text{arg} \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right] \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}} > 0 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\tan \varphi = -Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = Q \left(\frac{1}{x} - x \right)$$

$$\begin{cases} x \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0 \end{cases}$$



2.3. Résonance en tension aux bornes du condensateur (charge)

La relation entre la tension aux bornes du condensateur et l'intensité qui le traverse est :

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

En adoptant les notations complexes:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow u_C(t) = U_C \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{u}_C(t) = U_C e^{j\varphi_C} e^{j\omega t} = \underline{U}_C e^{j\omega t}$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow \underline{i} = jC\omega \underline{u}_C \Rightarrow \underline{u}_C = \frac{1}{jC\omega} \underline{i} \Rightarrow \underline{U}_C = \frac{1}{jC\omega} \underline{I_m} = \frac{1}{jC\omega} \frac{\underline{E}}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

$$\Rightarrow \underline{U}_C = \frac{\underline{E}}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} = \frac{\underline{E}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{RLC\omega}{L}}$$

En posant $x = \omega/\omega_0$ avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = L\omega_0/R$ on a :

$$\Rightarrow \underline{U}_C = \frac{\underline{E}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} \Rightarrow \boxed{\underline{U}_C = \frac{\underline{E}}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}}$$

2.3.1. Etude de l'amplitude U_C

$$U_C = |U_C| = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Cherchons si U_C présente un extremum ;

$$\frac{dU_C}{dx} = -E \frac{x \left[2(x^2 - 1) + \frac{1}{Q^2} \right]}{\left[(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right]^{3/2}}$$

- U_C présente en $x = 0 \Rightarrow \omega = 0$ (signal continu) un extremum.
- Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: U_C présente un extremum en

$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \Rightarrow \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Cette valeur correspond à la résonance de la charge du condensateur. Contrairement au cas de la résonance d'intensité, la résonance de charge (lorsqu'elle existe) se produit pour une valeur de x inférieure à 1, soit pour une pulsation inférieure à la pulsation propre

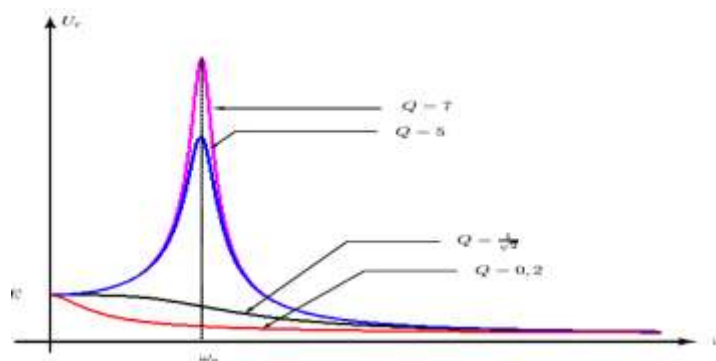
On a donc

$$U_{C(\max)} = \frac{2EQ^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

$$\text{si } Q \gg 1 \Rightarrow U_{C(\max)} = QE$$

C'est le phénomène de surtension.

- Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$: U_C ne présente pas d'extremum car U_C est une fonction décroissante.

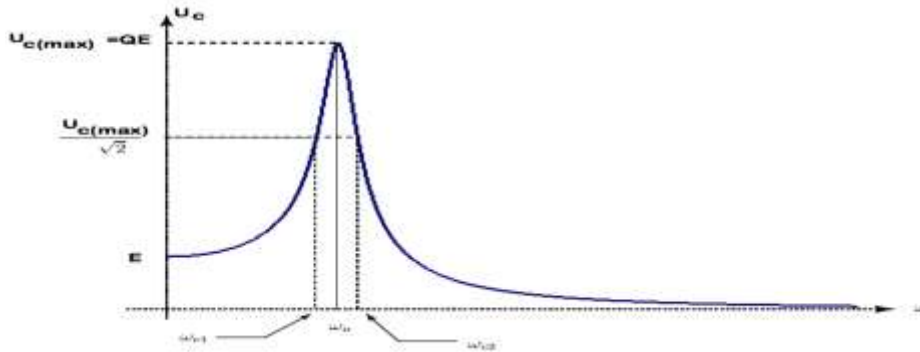


2.3.2. Bande passante à $-3dB$

La bande passante à $-3dB$ est l'intervalle des pulsations $[\omega_1, \omega_2]$ ou fréquence $[f_1, f_2]$ tel que :

$$U_C \geq \frac{U_{C(\max)}}{\sqrt{2}}$$

$$U_C \geq \frac{U_{C(\max)}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} - \frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \\ x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} + \frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \end{cases}$$



$$\text{si } Q \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 \cong \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \\ \omega_2 \cong \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{Q}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \end{cases}$$

La largeur de la bande passante à $-3dB$ est :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

2.3.3. Etude du déphasage ϕ

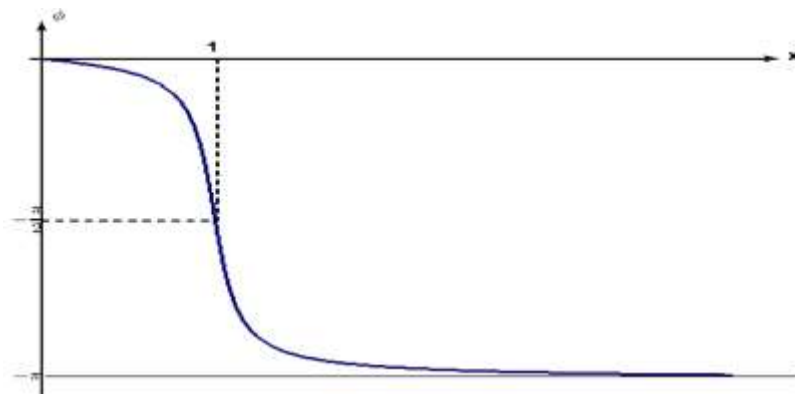
$$\begin{aligned} \frac{U_C}{E} &= \frac{1}{1 - x^2 + \frac{j}{Q}x} \Rightarrow \text{Arg}(U_C) = \arg(E) - \arg\left[1 - x^2 + \frac{j}{Q}x\right] \\ &\Rightarrow \varphi_C = \varphi_e - \arg\left[1 - x^2 + \frac{j}{Q}x\right] \end{aligned}$$

En posant $\phi = \varphi_C - \varphi_e$ on a :

$$\phi = -\arg \left[1 - x^2 + \frac{j}{Q}x \right] \Rightarrow \sin \phi = \frac{\frac{x}{Q}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} < 0 \Rightarrow \phi \in [-\pi; 0]$$

$$\boxed{\tan \phi = -\frac{\frac{x}{Q}}{1-x^2}}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow 0 \Rightarrow \phi \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow \phi \rightarrow -\pi \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



On remarquera que la phase de la tension aux bornes du condensateur par rapport à la tension du générateur se déduit de la phase de l'intensité par une translation le long de l'axe des ordonnées d'une valeur de $-\pi/2$ soit :

$$\phi = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

2.4. Tension aux bornes de R, L , en fonction de x

➤ Aux bornes de R

$$u = Ri \Rightarrow \underline{U}_R = R \underline{I}_m = \frac{\underline{E}}{\left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]}$$

$$\boxed{U_R = |\underline{U}_R| = \frac{E}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}}$$

➤ Aux bornes de L

$$u_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \underline{U}_L = jL\omega \underline{I}_m = jL\omega \frac{\underline{E}}{R \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]}$$

$$U_L = |U_L| = \frac{Ex^2}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

2.5. Puissance

2.5.1. Facteur de puissance

La puissance instantanée est définie par :

$$P(t) = \frac{\delta W}{\delta t} = u(t) \cdot i(t)$$

La puissance moyenne ou aussi puissance active est par définition :

$$P_m = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

$$\left. \begin{array}{l} u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \end{array} \right\} \Rightarrow P(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)]$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \Rightarrow P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos \varphi]$$

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos \varphi] dt$$

$$\Rightarrow P_m = \frac{U_m I_m}{2T} \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) dt}_{=0} + \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T \cos \varphi dt = \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T \cos \varphi dt$$

$$\Rightarrow P_m = \frac{U_m I_m}{2T} \cos \varphi \int_0^T dt = \frac{U_m I_m}{2T} \cos \varphi [t]_0^T = \frac{U_m I_m}{2T} \cos \varphi (T - 0)$$

Il vient finalement :

$$P_m = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi$$

- ✓ $\cos \varphi$: facteur de puissance. Sa valeur est comprise entre 0 et 1. Le facteur de puissance est de même signe que la puissance active. Il est positif lorsque le dipôle est récepteur et négatif lorsque le dipôle est générateur.
- ✓ $P_m = (U_m I_m \cos \varphi)/2$: puissance active ou puissance utile
- ✓ $Q = (U_m I_m \sin \varphi)/2$: puissance réactive. Elle s'exprime en Volt-Ampère-réactif (VAr)

- ✓ $S = U_m I_m / 2$: puissance apparente. Elle est sans signification physique particulière. Elle est la limite supérieure de la puissance active qu'un circuit peut absorber. Elle donnera donc une indication sur les valeurs limites en tensions et en courant d'un récepteur. Elle s'exprime en *Volt-Ampère (VA)*
- ✓ $S^2 = P_m^2 + Q^2$

$$P_m = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi \Rightarrow I_{eff} = \frac{P_m}{U_{eff} \cos \varphi}$$

Il faut que $\cos \varphi$ soit le plus grand possible pour que I_{eff} soit minimal afin de minimiser les pertes joules.

2.5.2. Puissance moyenne aux bornes de R, L, C

➤ Résistance pure

$$\underline{Z}_R = R \Rightarrow \varphi_R = 0 \Rightarrow P_m = \frac{U_m I_m}{2}$$

La puissance moyenne dissipée dans une résistance est :

$$P_m = \frac{U_m I_m}{2} = U_{eff} I_{eff} = R I_{eff}^2$$

➤ Bobine idéale

$$\underline{Z}_L = jL\omega \Rightarrow \varphi_L = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_m = 0$$

La puissance moyenne dissipée dans une bobine idéale est nulle :

$$P_m = 0$$

➤ Condensateur

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow \varphi_C = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow P_m = 0$$

La puissance moyenne dissipée dans un condensateur est nulle :

$$P_m = 0$$

2.5.3. Puissance complexe

Par définition la puissance complexe \underline{P} est :

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{U}_m \cdot \underline{I}_m^* = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^*$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u} \\ \underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{P} = \frac{1}{2} \underline{U}_m \cdot \underline{I}_m^* = \frac{1}{2} U_m e^{j\varphi_u} I_m e^{j\varphi_i} = \frac{1}{2} U_m I_m e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\Rightarrow \underline{P} = \frac{1}{2} U_m I_m e^{j\varphi} = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi + j \sin \varphi] = \underbrace{\frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi}_{P_m} + j \underbrace{\frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi}_Q$$

Il vient finalement :

$$\underline{P} = P_m + jQ$$

2.5.4. Récapitulatif

	Puissance active	Puissance réactive	Facteur de puissance
Résistance	$P_m = R I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{R}$	0	1
Inductance	0	$Q = L\omega I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{L\omega}$	0
Condensateur	0	$Q = -C\omega U_{eff}^2 = \frac{I_{eff}^2}{C\omega}$	0

La puissance réactive Q passe alternativement de la bobine au condensateur mais reste constante. Elle représente l'énergie emmagasinée dans le circuit RLC .

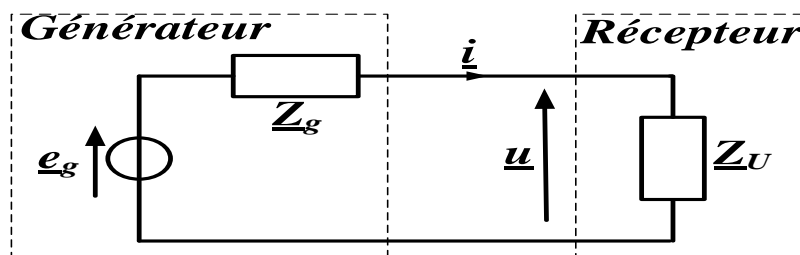
2.5.5. Adaptation d'impédance

2.5.5.1. Principe

Pour que le transfert de puissance soit maximal d'un générateur vers un récepteur, l'impédance du générateur et celle du récepteur doivent être adaptées l'une à l'autre. On dit alors qu'il y a adaptation d'impédance (ou adaptation d'impédance en puissance).

2.5.5.2. Puissance maximale transférée

Considérons une charge d'utilisation notée Z_U branchée sur un générateur de tension sinusoïdale de force électromotrice e_g et d'impédance interne Z_g .



Calculons la valeur de Z_U pour laquelle la puissance active fournie est maximale :

$$\begin{cases} \text{générateur} \Rightarrow \begin{cases} \underline{Z}_g = R_g + jX_g \\ \underline{e}_g = \underline{E}_g e^{j\omega t} \end{cases} \\ \text{récepteur} \Rightarrow \underline{Z}_U = R_U + jX_U \end{cases}$$

En utilisant la notation complexe, la puissance complexe fournie par le générateur est :

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^* \\ \underline{i} &= \frac{\underline{e}_g}{\underline{Z}_U + \underline{Z}_g} \Rightarrow \underline{i}^* = \frac{\underline{e}_g^*}{(\underline{Z}_U + \underline{Z}_g)^*} \\ \underline{u} = \underline{Z}_U \underline{i} \Rightarrow \underline{P} &= \frac{1}{2} \underline{Z}_U \underline{i} \cdot \underline{i}^* = \frac{1}{2} (R_U + jX_U) \frac{\underline{e}_g \underline{e}_g^*}{(\underline{Z}_U + \underline{Z}_g)(\underline{Z}_U + \underline{Z}_g)^*} \\ \Rightarrow \underline{P} &= \frac{1}{2} (R_U + jX_U) \frac{\underline{E}_g^2}{(\underline{Z}_U + \underline{Z}_g)(\underline{Z}_U + \underline{Z}_g)^*} = \frac{1}{2} (R_U + jX_U) \frac{\underline{E}_g^2}{(R_g + R_U)^2 + (X_U + X_g)^2} \\ \Rightarrow \underline{P} &= \underbrace{\frac{1}{2} \frac{R_U \underline{E}_g^2}{(R_g + R_U)^2 + (X_U + X_g)^2}}_{P_m = P_{\text{active}}} + j \underbrace{\frac{1}{2} \frac{X_U \underline{E}_g^2}{(R_g + R_U)^2 + (X_U + X_g)^2}}_Q \end{aligned}$$

La puissance moyenne (puissance active) fournie à la charge est donnée par la partie réelle de la puissance complexe :

$$P_{\text{active}} = \frac{1}{2} \frac{R_U \underline{E}_g^2}{(R_g + R_U)^2 + (X_U + X_g)^2}$$

P_{active} est maximale si :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{active}}}{dR_U} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dP_{\text{active}}}{dX_U} = 0 \\ \left. \begin{aligned} \frac{dP_{\text{active}}}{dR_U} = 0 &\Rightarrow R_g = R_U \\ \frac{dP_{\text{active}}}{dX_U} = 0 &\Rightarrow X_U = -X_g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{P_{\text{active max}} = \frac{\underline{E}_g^2}{8R_g}}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_{\text{active}}}{dR_U} = 0 &\Rightarrow R_g = R_U \\ \frac{dP_{\text{active}}}{dX_U} = 0 &\Rightarrow X_U = -X_g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{Z}_U = R_U + jX_U = R_g - jX_g = \underline{Z}_g^*$$

La puissance active est donc maximale lorsque la **condition d'adaptation d'impédance**

$\underline{Z}_U = \underline{Z}_g^*$ est réalisée. En transformant la source de Thévenin en son équivalent en Norton,

la condition d'adaptation reste toujours la même. On admet que la condition d'adaptation ne dépend pas du mode de représentation (Norton ou Thévenin) de la source réelle.